PRÉPARATION À L'AGRÉGATION EXTERNE : DENSITÉ DES FONCTIONS CONTINUES MAIS DÉRIVABLES EN AUCUN POINT

TONY LIMAGNE

Le développement est adapté pour les leçons 205, 223, 241, 228, 244 et 201.

1. Développement

On note E l'espace vectoriel des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme de convergence uniforme

$$\|f\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |f(t)|.$$

On rappelle que E est un espace de Banach. Pour $N \in \mathbb{N}$ on pose

$$\mathscr{U}_N = \{f \in E : \quad \forall t \in [0,1], \exists s \in [0,1], \quad |f(t) - f(s)| > N|t-s|\}.$$

Lemme 1. Pour tout $N \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathscr{U}_N$ est une partie ouverte dense de E.

Démonstration. Montrons que $\mathscr{U}_N$ est ouvert. Soit (f_k) une suite de $E \setminus \mathscr{U}_N$ qui converge uniformément vers $f \in E$ sur $[0,1]$. Il existe une suite (t_k) de $[0,1]$ telle que

$$\forall s \in [0,1], \quad |f_k(t_k) - f_k(s)| \leqslant N|t_k - s|.$$

Par le théorème de Bolzano-Weierstrass, il existe une sous-suite $(t_{\phi(k)})$ qui converge vers un point $t \in [0,1]$. On a

$$f_{\phi(k)}(t_{\phi(k)}) \xrightarrow[k\to+\infty]{} f(t).$$

En effet, fixons $\epsilon > 0$. Pour k assez grand on a

$$\begin{aligned}
|f_{\phi(k)}(t_{\phi(k)}) - f(t)| &\leqslant |f_{\phi(k)}(t_{\phi(k)}) - f(t_{\phi(k)})| + |f(t_{\phi(k)}) - f(t)|, \\
&\leqslant \|f_{\phi(k)} - f\|_\infty + |f(t_{\phi(k)}) - f(t)|, \\
&< \epsilon + |f(t_{\phi(k)}) - f(t)|.
\end{aligned}$$

Et puisque f est continue en t, on a pour k assez grand

$$|f(t_{\phi(k)}) - f(t)| < \epsilon,$$

ce qui prouve la convergence voulue. Enfin, on passe à la limite dans l'inégalité

$$\forall s \in [0,1], \quad |f_{\phi(k)}(t_{\phi(k)}) - f_{\phi(k)}(s)| \leqslant N|t_{\phi(k)} - s|,$$

pour avoir

$$\forall s \in [0,1], \quad |f(t) - f(s)| \leqslant N|t-s|,$$

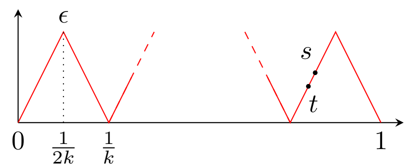
ce qui prouve que $f \in E \setminus \mathscr{U}_N$.

Montrons que $\mathscr{U}_N$ est dense dans E. Soient $f \in E$ et $\epsilon > 0$. D'après le théorème d'approximation de Weierstrass, il existe une application polynomiale $P : [0,1] \to \mathbb{R}$

Date: Année 2024.

telle que $\|f-P\|_\infty < \epsilon$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ on note ϕ_k la fonction continue et $\frac{1}{k}$-périodique définie par

$$\phi_k(t) = \begin{cases} 2\epsilon k t & \text{si} \quad t \in [0, \frac{1}{2k}] \\ 2\epsilon - 2\epsilon k t & \text{si} \quad t \in [\frac{1}{2k}, \frac{1}{k}] \end{cases}$$



On pose $g_k = P - \phi_k$ pour avoir

$$\|f - g_k\|_\infty \leqslant \|f - P\|_\infty + \|\phi_k\|_\infty < 2\epsilon.$$

Il reste à voir que $g_k \in \mathscr{U}_N$ pour un certain k. Soit $t \in [0,1]$. Il existe $s \in [0,1]$ tel que

$$|\phi_k(t) - \phi_k(s)| = 2\epsilon k |t-s|,$$

et donc pour k assez grand

$$|g_k(t) - g_k(s)| \geqslant |\phi_k(t) - \phi_k(s)| - |P(t) - P(s)| \geqslant (2\epsilon k - \|P'\|_\infty)|t-s|.$$

On choisit k de sorte que

$$2\epsilon k - \|P'\|_\infty > N,$$

pour avoir $g_k \in \mathscr{U}_N$. $\square$

Théorème 2. L'ensemble des fonctions continues et nulles part dérivables sur $[0,1]$ est un ensemble G_δ-dense de E (et donc en particulier non vide).

Démonstration. Le théorème de Baire assure que

$$\mathscr{U} = \bigcap_{n=0}^{+\infty} \mathscr{U}_n,$$

est un G_δ-ensemble dense de E. Fixons $f \in \mathscr{U}$ et $t \in [0,1]$. Par l'absurde, supposons f dérivable en t. La fonction

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, t \mapsto \begin{cases} \frac{f(t)-f(s)}{t-s} & \text{si } s \neq t, \\ f'(t) & \text{si } s = t. \end{cases}$$

est continue et donc bornée. Ceci implique que

$$\forall s \in [0,1], \qquad |f(t) - f(s)| \leqslant (\lfloor \|g\|_\infty \rfloor + 1)|t-s|,$$

c'est-à-dire $f \notin \mathscr{U}_{\lfloor \|g\|_\infty \rfloor + 1}$. Absurde. $\square$

Référence : [GT, Chap. I.2, §2].

2. Un exemple concret

On va maintenant donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est continue mais nulle part dérivable. Pour cela, considérons la fonction 1-périodique $\Delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dont la restriction à $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est donnée par $\Delta(x) = |x|$. Cette fonction est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{k}{2} : k \in \mathbb{Z}\right\}$ mais non dérivable en chaque $\frac{k}{2}$.

Exemple 3. La somme f de la série des fontions

$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{2^n}\Delta(2^n x),$$

est continue sur $\mathbb{R}$ mais dérivable nulle part.

Démonstration. La continuité de f se déduit par convergence normale. Par 1-périodicité de f, il suffit de montrer que f n'est dérivable nulle part sur $[0,1[$.

Fixons $a \in [0,1[$. Développons a en écriture dyadique :

$$a = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\epsilon_k}{2^k} \quad \text{où} \quad \epsilon_k \in \{0,1\}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, notons

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^k} \qquad \text{et} \qquad \alpha_n = a_n + \frac{1}{2^n}.$$

Fixons $p \in \mathbb{N}^*$. Si $p \geqslant n$ on a alors

$$\Delta(2^p a_n) = \Delta(2^p \alpha_n) = 0,$$

car $2^p a_n$ et $2^p \alpha_n$ sont entiers.

Supposons $p < n$. On a

$$2^p a_n = N + \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^{k-p}} \quad \text{avec} \quad N \in \mathbb{N}.$$

Par périodicité de Δ, on a alors

$$\Delta(2^p a_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^{k-p}}\right) \quad \text{et} \quad \Delta(2^p \alpha_n) = \Delta\left(\sum_{k=p+1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}}\right).$$

Dès lors, on a

— Si $\epsilon_{p+1} = 0$ alors

$$0 \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \leqslant \frac{1}{2},$$

de sorte que $\Delta(2^p \alpha_n) - \Delta(2^p a_n) = 2^p(\alpha_n - a_n) = \frac{1}{2^{n-p}}$.

— Si $\epsilon_{p+1} = 1$ alors

$$\frac{1}{2} \leqslant \sum_{k=p+1}^{n} \frac{\epsilon_k}{2^{k-p}} + \frac{1}{2^{n-p}} \leqslant 1,$$

de sorte que $\Delta(2^p \alpha_n) - \Delta(2^p a_n) = -2^p(\alpha_n - a_n) = -\frac{1}{2^{n-p}}$.

En résumé, on a

$$y_n = \frac{f(\alpha_n) - f(a_n)}{\alpha_n - a_n} = 2^n \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{\Delta(2^p \alpha_n) - \Delta(2^p a_n)}{2^p}\right) = \sum_{p=0}^{+\infty} (-1)^{\epsilon_{p+1}}.$$

Donc la suite (y_n) diverge.

Supposons que f soit dérivable en a. Il existe (e_n) et (e'_n) qui convergent vers 0 tels que

$$f(a_n) - f(a) = (a_n - a)(f'(a) - e_n) \quad \text{et} \quad f(\alpha_n) - f(a) = (\alpha_n - a)(f'(a) - e'_n).$$

En soustrayant, on a $f(\alpha_n) - f(a_n) = (\alpha_n - a)(f'(a) - e'_n) + (a - a_n)(f'(a) - e_n)$, et donc

$$f(\alpha_n) - f(a_n) - (\alpha_n - a_n)f'(a) = (\alpha_n - a_n)(e'_n - e_n)$$

Ainsi, la suite (y_n) converge vers $f'(a)$. Absurde. □

Référence : [G, Chap. 2, §2, Exercice 9].

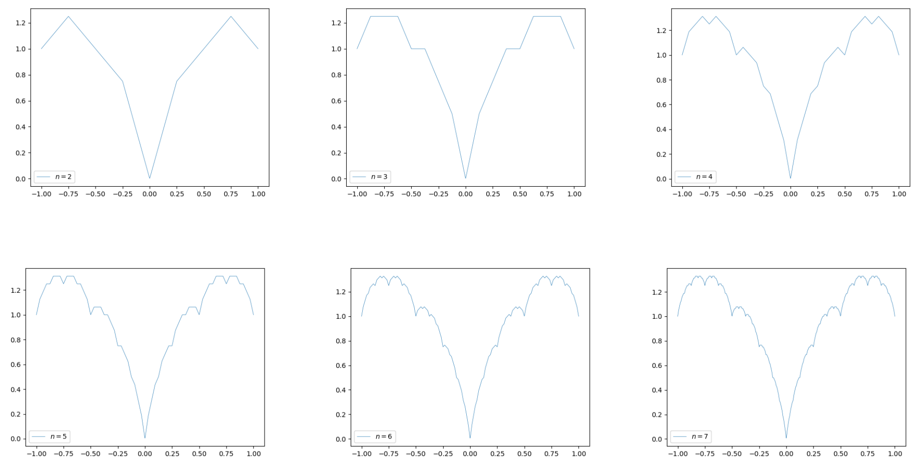


FIGURE 1. Premières sommes partielles de la série $\sum f_n$

Remarque 4. Les premiers exemples de fonctions continues nulle part dérivable sont dûs à Weierstrass (voir [FGN, Chap. 2, Exercice 2.18.]) et Bolzano (voir [FGN, Chap. 2, Exercice 2.19.]).

3. Quelques questions bêtes auxquelles il faut absolument savoir répondre rapidement

(1) Montrer que la fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(2^n x)}{2^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ mais non dérivable en 0 (voir si besoin [FGN, Chap. 2, Exercice 2.13.]).

(2)

(3)

Références

[G] X. Gourdon, *Analyse*, 3^e édition, Ellipses, 2020.

[GT] S. Gonnord et N. Tosel, *Thèmes d'analyse pour l'agrégation : topologie et analyse fonctionnelle*, Ellipses, 1996.

[FGN] S. Francinou, H. Gianella et S. Nicolas, *Oraux X-ENS*, Vol. 5, Cassini, 2023.